Exercice : la nephroïde

- $\begin{cases} x(t) = 3\cos t + \cos(3t) \\ y(t) = 3\sin t + \sin(3t) \end{cases}$

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques donc on fait l'étude sur $[-\pi;\pi]$.

La fonction x est paire et y est impaire donc on restreint l'étude à $[0;\pi]$ et on complètera le tracé via une symétrie selon (Ox).

Rq: En calculant $x(\pi-t)$ et $y(\pi-t)$ on pourrait réduire l'étude à $[0;\frac{\pi}{2}]$ avec en plus une symétrie selon (Oy).

- les fonctions x et y sont dérivables sur $[0;\pi]$. On a $\forall t \in [0;\pi]$, $x'(t) = -3\sin t - 3\sin(3t)$
et $y'(t) = 3\cos t + 3\cos(3t)$

$x'(t) = 0$
$\Leftrightarrow \sin t = -\sin(3t)$
$\Leftrightarrow \sin t = \sin(-3t)$
$\Leftrightarrow t = -3t\ [2\pi]$ ou $t = \pi + 3t\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow 4t = 0\ [2\pi]$ ou $-2t = \pi\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow t = 0\ [\frac{\pi}{2}]$ ou $t = \frac{-\pi}{2}\ [\pi]$
$\underset{\text{Sur } [0;\pi]}{\Leftrightarrow}$ $t = 0, \frac{\pi}{2}$ ou π

$y'(t) = 0$
$\Leftrightarrow \cos t = -\cos(3t)$ cf trigo sup
$\Leftrightarrow \cos t = \cos(\pi - 3t)$
$\Leftrightarrow t = \pi - 3t\ [2\pi]$ ou $t = -(\pi - 3t)\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow 4t = \pi\ [2\pi]$ ou $-2t = -\pi\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$ ou $t = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
$\underset{\text{Sur } [0;\pi]}{\Leftrightarrow}$ $t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{4}$

Rq: On aurait pu aussi utiliser les formules de trigo :
$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
de façon à obtenir $x'(t) = -6\sin(2t)\cos t$ et $y'(t) = 6\cos(2t)\cos t$
ce qui rend les résolutions $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ faciles.

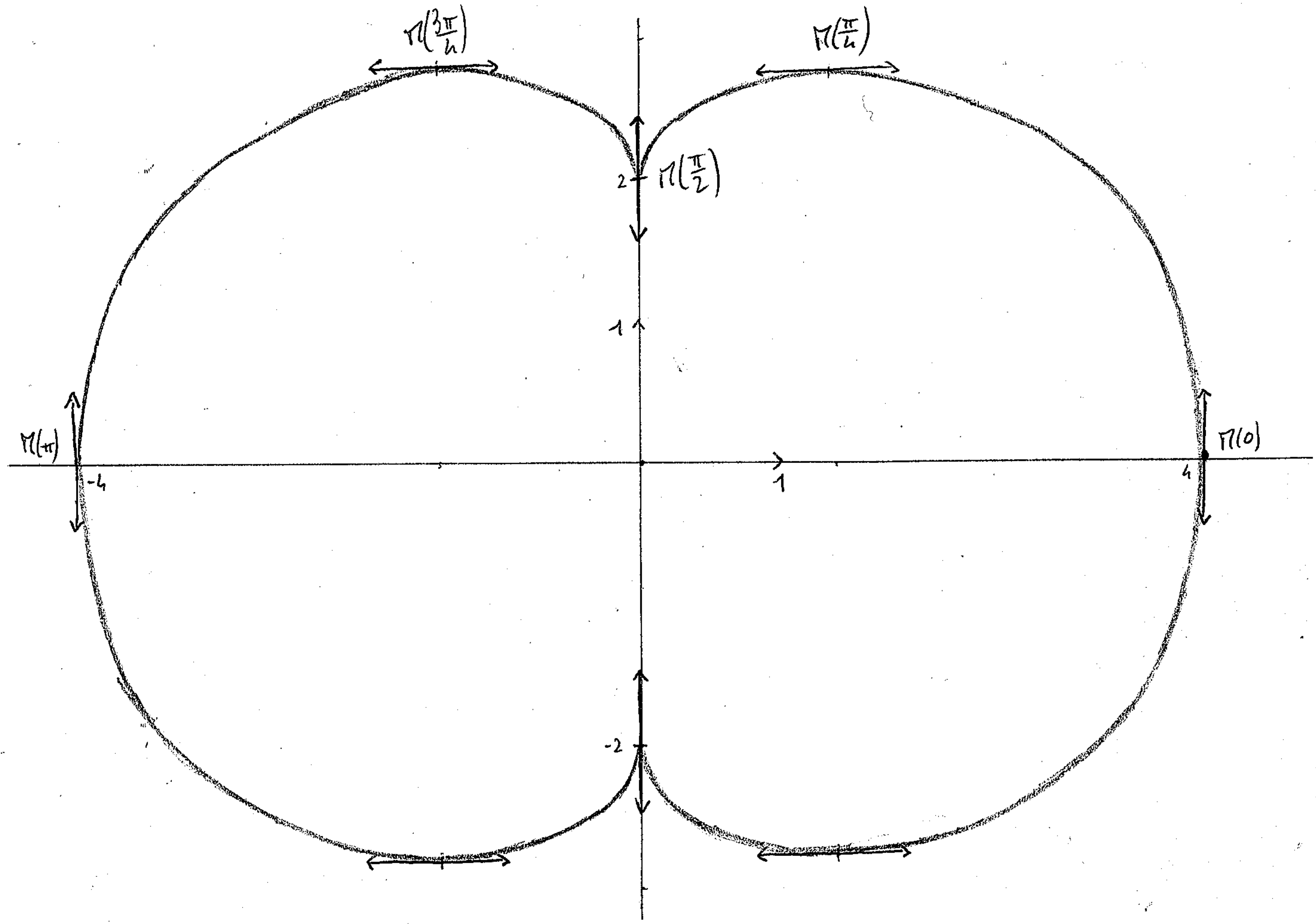
t	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0
x	4	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-4
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

* Il y a une tangente verticale pour $t = 0$ et $t = \pi$.
une tangente horizontale pour $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{3\pi}{4}$.

Le point correspondant à $t = \frac{\pi}{2}$ est un point stationnaire.
On calcule donc la dérivée seconde :
$x''(t) = -3\cos t - 9\cos(3t)$
$y''(t) = -3\sin t - 9\sin(3t)$
donc $f''(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} x''(\frac{\pi}{2}) \\ y''(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Donc la tangente pour $t = \frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, ie elle est verticale.

* On place donc les points correspondants à $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π ainsi que les tangentes en chaque point. On utilise aussi $\sqrt{2} \approx 1,4$ et $2\sqrt{2} \approx 2,8$.



$$L(f, 0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \|f'(t)\|\, dt \text{ par symétries.}$$

Or $\|f'(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = (-3\sin t - 3\sin(3t))^2 + (3\cos t + 3\cos(3t))^2$

$$= 9\left[\sin^2(t) + \sin^2(3t) + 2\sin(t)\sin(3t) + \cos^2(t) + \cos^2(3t) + 2\cos(t)\cos(3t)\right]$$

$$= 9\left[2 + 2\sin(t)\sin(3t) + 2\cos(t)\cos(3t)\right]$$

$$= 18\left[1 + \sin(t)\sin(3t) + \cos(t)\cos(3t)\right]$$ $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$

$$= 18(1 + \cos(2t))$$

$$= 36\cos^2 t.$$

Ainsi $L(f, 0, 2\pi) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^2 t}\, dt = 24\int_0^{\pi/2} |\cos t|\, dt$

$$= 24\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 24\left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = \boxed{24}$$

car $\cos t \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$